A 28. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 1997

Beadási határidő: **1997. november 17. (hétfő)** 12^{00},

Postacím: Dávid Gyula, Fizikus Diákkör, Gólyavár, Hallgatói Iroda, H-1088 Budapest, Múzeum körút 6-8. E-mailen LaTeX-formátumban a **dgy@ludens.elte.hu** címre küldhetők a megoldások. Faxon a (1)-266-2556 számra lehet küldeni a megoldásokat.

A feladatok személyesen **a Gólyavár ruhatárában** adhatók le. A Műegyetemen **Kugler Sándor**nál, Szegeden **Varga Zsuzsá**nál az Elméleti Fizikai Tansz.-en, vagy **Hilbert Margit**nál az Optikai Tansz.-en, Debrecenben **Szabó Istvánn**ál, Pécsett **Korpa Csabá**nál lehet leadni a megoldásokat.

A feladatok megoldása során bármilyen segédeszköz használható. Az értékelés évfolyamonként történik. Maximum 10 feladatot lehet beadni, mindegyik feladat 100 pontot ér. **Minden feladatot külön lapon, név és évfolyam feltüntetésével kérünk**. Azonos vagy közel azonos összpontszám esetén a díjazásnál előnyben részesül az, aki korosztályának megfelelő feladatokból válogatott.

A zsűri évfolyamonként nulla, egy vagy több első, második és harmadik díjat, valamint dícséreteket oszt ki. Ezekkel szponzoraink pillanatnyi adakozó kedvétől függő pénzjutalom is jár, ennek mértékéről jelenleg még nem tudunk nyilatkozni. Egyes feladatok kiemelkedő megoldásáért 1000 Ft-os különdíj adható. Már egy feladatért is kapható díj, tehát egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A legeredményesebb versenyzőknek Diósi Lajos (KFKI) 15 000 Ft különdíjat ajánlott fel. Köszönjük!

A verseny eredményhirdetése Fizikus Mikulással egybekötve **1997. december 4-én 14 órakor** kezdődik az ELTE TTK D épületének Nagytermében. Az egyes feladatok legjobb megoldóit előre felkérjük, hogy megoldásukat az eredményhirdetés után ismertessék.

Minden résztvevőnek jó versenyzést, tanulságos és eredményes feladatmegoldást kíván

az ELTE TTK Fizikus Diákköre és
a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete

1. Ó napsugár... Hárman állnak a mező közepén, valahol a tökéletes gömb alakú Földön, és a Nappal szembenézve süttetik arcukat. Csak hát semmi sem tarthat örökké, és még a Nap is elmozdul az égen. Napimádóink elindulnak hát a Nap nyomában úgy, hogy sebességvektoruk mindig az árnyékukkal ellentétes irányba mutat. Állóképes Vili sohasem fárad el, az ő sebességének abszolút értéke mindig állandó. Búsuló Lajos viszont hamar rájön, hogy a Napot úgysem fogja utólérni, elcsügged, és amint árnyéka hosszabbodni kezd, annak hosszával fordított arányban csökkenti sebességét. Csakazértis Józsi ezzel szemben egyre dühösebb és gyorsabb lesz: sebessége egyenesen arányos árnyéka pillanatnyi hosszával.

   Milyen pályát ír le a három napimádó (A, B és C) a földgömbön?

   Diszkutáljuk a megoldást a kezdőpont földrajzi helyzete, az indulás napja és perce, a kezdősebesség, valamint (B és C esetében) a sebességfüggvény együtthatója szerint. Vizsgáljuk meg a mozgások lehetséges típusait és végállapotait! (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy vándorainknak a tengerek sem jelentenek akadályt.)

   (Barnaföldi Gergely – Dávid Gyula)

2. Tűzvarázsló halászlevet szeretne vacsorára, ezért egy tűzgömböt hoz létre a tó fenekén. Mi történik? (Tűzgömb: olyan kb. 1 m átmérőjű tartomány, amelyben hirtelen [kb. 1 másodperc] alatt, egyenletes térbeli eloszlásban annyi hő keletkezik, amennyi [lassan adagolva] a víz felforralásához és elpárologtatásához bőven elegendő lenne, de a molekulák ionizációjához kevés.)

   (Csilling Ákos)

3. Sommerfeld parítássértő bicskája: Ha egy kavicsot domború felével lefelé fordítva az asztalra helyezünk és bármelyik irányban megpörgetjük, a kavics általában simán lelassulva áll meg. Ritkán, speciális alakú kavics esetén azonban megtörténhet, hogy egyik irányú forgásából visszafordul a kavics, ellenkező irányban kezd forogni, és csak azután áll meg. Ma már a játékboltok kínálatában találkozhatunk műanyagból készült speciális alakú "kavicsokkal", és állítólag Sommerfeld bicskája is képes volt erre a mutatványra. Adjunk fizikai magyarázatot a jelenségre, s vizsgáljuk meg, létezhet-e olyan test, amely az asztalon megpörgetve MINDKÉT irányból képes visszafordulni!

   (Radnai Gyula)

4. Mekkora lehet az az egysejtű, amit egy másik sejt (makrofág) be tud kebelezni? A makrofág közlítőleg 60% folyadékot, és 40% szárazanyagot tartalmaz. A szárazanyagtartalom a sejten belül csak apró gömbök formájában létezhet. Egy gömb térfogata nem lehet kisebb a makrofág teljes térfogatának 5 ezrelékénél. A bekebelezés állábak kibocsátásával történik. Az álláb-képzés az összfelületnek maximum 5%-a lehet.

(Horváth Anna)

5. (A feladat kapcsolódik az 1997-es Eötvös-verseny egyik feladatához.)

   Egy asztal szélén álló pohárban hajlékony fonálra fűzött hosszú gyöngysor van. Ha a lánc elejét kilógatjuk a pohár falán, gyorsuló mozgásba kezd, és kihúzza maga mögött a lánc további részét is a pohárból. A kísérletek szerint egy idő után a láncnak a pohár peremén átbukó része megemelkedik, és magasan a perem fölött fordul át. Vizsgáljuk meg a mozgást, az energiaviszonyokat, a fellépő erőket, és magyarázzuk meg a lánc megemelkedését!

(Gnädig Péter)

6. Pezsgőtablettát vízbe dobunk. Adjuk meg a tabletta méretét az idő függvényében!

(Horváth Anna)

7. Homogén gravitációs térben egy nyújthatatlan, két végén rögzített lánc lóg. Tanulmányozzuk a láncon terjedő zavarokat, írjuk fel a hullámegyenletet minél kezelhetőbb alakban, és adjuk meg a diszperziós relációt! Vizsgáljuk a különböző gerjesztettségű állapotokat, és adjuk meg közelítőleg a hozzájuk tartozó frekvenciákat! (A láncot csak a nyugvó görbe függőleges síkjában gerjesztjük.)

(Borsányi Szabolcs)

8. Becsüljük meg a Föld szögsebességének évszakos változását! Milyen hatásoknak tulajdonítható ez? Hogyan változhatott az ingadozás az elmúlt százmillió évben? És mekkora lesz egy-kétszáz év múlva, az üvegház-hatás kibontakozása után?

(Dávid Gyula)

9. Helyezzünk el egy egyenes mentén három egyforma rugalmas golyót. Nyomjuk meg tengelyirányban a két szélsőt, úgy, hogy azok a középsőt összeszorítsák.

   a/ Vizsgáljuk a nyomóerő-elmozdulás kapcsolatot!

   b/ Kényszerítsünk a középső golyóra a tengelyre merőleges kis elmozdulást, ezáltal nyírást vezetve be a kontaktusoknál. Írjuk le a rendszer mozgását! Különös gondot kell fordítani a golyók érintkezéseinél a határfeltételekre.

(Kertész János)

10. Egy R sugarú, M tömegű, L hosszúságú ($L \gg R$) tűzoltófecskendőt vízszintes talajon v_0 sebességgel elgurítunk olymódon, hogy a végét megfogjuk. A fecskendő egyre fogyó sugarú, egyre kisebb tömegű, de egyre nagyobb sebességű gurigaként mozog. (A súrlódási és közegellenállási veszteségek elhanyagolhatók, emellett a gravitációt is figyelmen kívül hagyhatjuk, mert $\frac{1}{2}Mv^2 \gg MgR$.) Használjuk az $M = 1, L = 1, v_0 = 1$ egységrendszert!

    Számítsuk ki a guriga tömegét, sugarát és sebességét a megtett x út függvényében, valamint a gurigára ható külső erőket! Igazoljuk, hogy

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad F_x = \frac{1}{2(1-x)} \quad \text{és} \quad F_y = 0,$$

    ahol F_x és F_y az erő sebességgel párhuzamos, ill. arra merőleges komponense.

    Vizsgáljuk meg a perdület megmaradásának tételét a fecskendő rögzített végpontjára vonatkoztatva!

(Gnädig Péter)

11. Erős fiúk kellő számú sör elfogyasztása után a söröskupakot hüvelyk- és mutatóujjuk közé fogva azt könnyedén össze tudják nyomni. Becsüljük meg, hogy mekkora erő szükséges ehhez a mutatványhoz! (A kupak peremén levő recéktől szükség esetén tekintsünk el. Ha másképp nem megy, a kupakot lapos koronggal is modellezhetjük.)

(Cserti József)

12. A hallás létrejöttéig a hanghullámoknak át kell alakulniuk kémiai jelekké. Mekkora a hanghullámok felerősödése, illetve halkulása a belső fülben, ha levegő–membrán–csont–csont–csont–membrán–víz a hullám terjedési útja? Milyen hangerősségnél kell megszakítani a sort, hogy ne jöjjön létre rezonancia? (A geometriai elrendezésről lásd. pl. Dr. Ribári Ottó: Fül–orr–gége gyógyászat, a mechanikai tulajdonságok leírásához jó közelítés, ha a membránt gumihártyának, a csontot vízkőnek tekintjük.)

(Horváth Anna)

13. A laposlápi önkormányzat új attrakciót készül felállítani a helyi vidámparkban: a Laposlápi Lengő Liftet. A tervek szerint az LLL abban különbözne a hagyományos felvonóktól, hogy (1) nincs liftaknája, így a kabin – amint az a névből sejthető – a föl-le liftezés mellett szabadon lenghet is, ezenkívül (2) motor sem lesz benne, a menetek lefolyása a lengő liftkabin és a csak függőlegesen mozgó ellensúly közötti kötélhúzásban dől majd el. (A függőleges tartószerkezet csak egy lengési síkot tesz lehetővé a kabin számára.) A gondok akkor kezdődtek, amikor a részletes műszaki terv kidolgozását egyik ismert felvonógyártó cég sem vállalta, ezért az önkormányzat most szélesebb körből várja a rendszer biztonságos üzemeltetéséhez szükséges alapvető számítások elvégzését. A legfontosabb kérdések a következők:

a/ Hány utasra tervezzék a kabint, ha az ellensúly tömege adott?

b/ Az állványon lévő, lépcsőn megközelíthető pneumatikus indító- és fékezőszerkezet, amely a beszállás idejére rögzíti is a rendszert, csak egy adott (vízszintes irányú) kezdősebességgel képes meglökni a függőleges helyzetű kabint. Milyen tartományban kell lennie az indítómagasságnak a rendszer biztonsága szempontjából? (A drótkötél hossza megegyezik az állvány magasságával.) Milyen lesz a menet jellege az indítómagasság függvényében?

c/ Milyen hosszú meneteket enged meg az a körülmény, hogy a lefékezést csak az indítómagasságban lehet elvégezni?

d/ Kell-e az utasokat óvni a fejreeséstől a menet ideje alatt? Átpördülhet-e a kabin?

e/ Mekkora maximális feszítőerőre méretezzék a drótkötelet? Bízhatnak-e abban, hogy a kötél végig feszes marad?

A biztonsági szempontok mellett természetesen szem előtt kell tartani a gazdaságosságot is: sok embert vonzó változatos menetekre lenne szükség. A rendszer olajozott működését a képviselőtestület egyik tagja, a helyi benzinkutat is üzemeltető nyugalmazott ezredes garantálná. Az önkormányzat minden részeredményt hálásan fogad.

(Kovács Zoltán)

14. Egy jógi légzőgyakorlat közben a következő mentális technikát gyakorolja:

”Belégzésnél a test kitágul, kilégzéskor a test összehúzódik. Minden belégzéskor a környező levegő az orrnyílásom felé mozdul, minden kilégzéskor pedig az ellenkező irányba.”

a/ Becsüljük meg, hogy a jógitól adott távolságban lévő levegő mennyit mozdul el a belégzéskor-kilégzéskor!

b/ Milyen távolságban válik ez az elmozdulás megmérhetetlenül kicsivé?

c/ Hogyan befolyásolja az elmozdulást a test belégzéskori tágulása, kilégzéskori összehúzódása?

(Márk Géza)

15. a/ Megnyitjuk a melegvíz-csapot, mert zuhanyozni szeretnénk. A víz egy elég hosszú, falba épített csövön jön egy távoli melegvíz-tartályból. Előttünk régen nem fürödtek, és a csőben levő víz már felvette a környezet 10 °C-os hőmérsékletét. Mi lesz a víz hőmérsékletének időfüggése a csap megnyitása után, ha a vízáram konstans?

b/ Mi történik, ha a fal (amiben a cső jön) hőmérsékleteloszlása nem konstans, hanem egy rövid szakaszon 10 helyett csak 0.001 °C fokos?

c/ Nagyon sokáig folyatjuk a meleg vizet. (Feltesszük, hogy a melegvíz-tartály végtelen nagy.) Ezután persze a víz túl forró, ezért megnyitjuk a hideg vizet, amihez utána nem nyúlunk. Ekkor elkezdünk játszani a melegvízzel: a csapot a következő időfüggvény szerint forgatjuk: $\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 \cdot \sin(\omega t)$. A csapból folyó víz mennyisége arányos a ϕ szögelfordulással. Mi lesz a kifolyó víz hőmérsékletének időfüggése?

(Veres Gábor)

16. Vezessük le a 2 dimenziós szappanhabban (sok, egymással érintkező buborék) egy buborék területének időbeli fejlődését leíró Neumann-egyenletet:

$$dA_n/dt = f(A_n, n, k),$$

ahol A_n egy n oldalú buborék területe, k a diffúziós konstans, n az oldalak száma. Adjuk meg az f függvény konkrét alakját! Mennyi az oldalszám kritikus értéke?

(Daruka István)

17. Egy edényben folyadék van. Az edény forgásszimmetrikus, de a fala nem merőleges az edény aljára. Határozzuk meg a nyugvó folyadék felszínének alakját! (Csak forgásszimmetrikus megoldásokat keressünk!)

(Farkas Zénó)

18. Egy asztalon álló edényben víz van, az edény aljából cső vezet az asztal mellett álló, szekrény nagyságú fekete doboz belsejébe. Ha az edénybe még egy kis vizet öntünk, az eredeti folyadékszint lecsökken. Ha viszont kimerünk némi vizet az edényből, a szint megemelkedik.

   Mi van a fekete dobozban? Állítsunk fel minél egyszerűbb modellt, és adjuk meg a vízszint változását a beöntött vagy kimert vízmennyiség függvényében! Változtassuk a modell paramétereit, és vizsgáljuk meg a rendszer viselkedését!

(Közli: Csákány Antal)

19. Von Mises szerint egy izotróp szilárd anyag képlékeny megfolyásának feltétele a következő:

$$\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} > K^2,$$

   ahol $\tilde{\sigma}_{ij}$ a feszültségtenzor spurtalan része: $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, a K pedig adott anyagi állandó.

   Tresca szerint viszont a képlékenységi határt a feszültségtenzor sajátértékei határozzak meg. A feltétel a legnagyobb σ_{max} és a legkisebb σ_{min} sajátértékkel a következő alakba írható:

$$|\sigma_{max} - \sigma_{min}| > K'$$

   ahol K' anyagi állandó.

   Mutassuk meg, hogy két dimenzióban Tresca és von Mises feltétele azonos kritériumot ad! Keressünk továbbá olyan deformációt, amelyet alkalmazva kisérletileg el lehet dönteni, hogy az anyag melyik feltételt követi!

(Tichy Géza)

20. Egy nagy edény vízben a falaktól távol létrehozunk egy gömb alakú R_0 sugarú üreget (buborék) melyben vákuum van. A külső légnyomás p_0.

   a/ Írjuk le az üreg falának viselkedését!

   b/ Hogyan mozog az üregben egy kezdetben v_0 radiális sebességű 'könnyű', a fallal rugalmasan ütköző részecske?

   c/ Hogyan módosul a helyzet, ha a buborékot kezdetben p_0 nyomású gáz tölti ki, a külső nyomás pedig $p = p_0 \cos(\omega t)$ szerint változik? Mekkora lesz a minimális buborékméret? Hogyan változik a gáz hőmérséklete?

(Csabai István)

21. Amikor a szőlőfürtöt megmossuk, még elég sok víz tapad meg (a felületi feszültség miatt) benne, amit később óvatos rázogatással eltávolíthatunk. (Természetesen a szőlőszemeket nem sértjuk meg.) Mennyi víz és hogyan maradhat ezután benne? Modellezzük a szőlőfürtöt egyforma sugarú, rögzített gömbökkel, amelyekkel a lehető legsűrűbben van kitöltve a végtelen tér, és a fürt mást (pl. a szőlőszemeket tartó vázat) nem tartalmaz. Milyen feltételekkel és mennyi víz maradhat ebben a szerkezetben? (Megköveteljük, hogy a "víztócsa" legyen "összefüggő").

   Van-e szerepe az elhanyagolt váznak a reális szőlő esetében? Van-e szerepe a szemek méretének? Javaslat: Próbáljuk megfigyelni a jelenséget kísérletileg is!

(Veres Gábor)

22. Közismert dogma, hogy a megmaradási tételek szimmetriák következményei. Speciálisan a klasszikus térelméletben minden folytonos szimmetriának egy megmaradó mennyiségre felírható kontinuítási egyenlet felel meg. Milyen szimmetria következménye a hidrodinamika közismert kontinuítási egyenlete ?

(Dávid Gyula)

23. Forgassunk egy $\mu(x)$ tömegeloszlású, L hosszúságú k rugalmassági állandójú, egydimenziósnak tekintett rudat ω szögsebességgel a hossztengelye körül. Mint az köztudomású, egy bizonyos $\omega > \omega_\circ$ szögsebesség fölött a rúd "kihajlik", stabil egyensúlyi helyzete többé nem a két végpontját összekötő egyenes lesz.

   Határozzuk meg ezt az $\omega_\circ$ szögsebességet!

   Útmutatás: Írjuk föl a rendszer Green-függvényét, és nézzük át az integrálegyenletek elméletét!

(Hantz Péter)

24. Adjunk meg olyan kísérleti eljárást, amellyel a fény terjedési sebességét a tér két pontja között nem egy oda-vissza úton mérhetjük meg, hanem csak egyetlen irányban! Esetleg mutassuk meg, hogy ez lehetetlen! Fejtsük ki továbbá, hogy milyen hatással van ez a probléma a relativitáselméletre!

(Szabó László)

25. A relativisztikus hidrodinamikában disszipatív folyamatok jelenlétében a (nyugalmi) sűrűség önmagában nem elégíti ki a kontinuítási egyenletet, csak akkor, ha egy másik, a négyessebességre merőleges vektort is hozzáadunk. Mi lehet ennek a fizikai jelentése? A kontinuítási egyenletet szokás az anyagmegmaradás törvénye matematikai alakjának tekinteni. Talán esetünkben nem teljesül a megmaradási törvény?

(Dávid Gyula)

26. Madách idejében még úgy gondolták az emberek, hogy a Nap melegét a benne elégő szén biztosítja. A Nap tömegéből és a kiáramló hőmennyiségből kiszámították, hogy a Nap további ötezer évig fog világítani. Becsüljük meg, hogy valójában mennyi ideig tart egy ekkora méretű és tömegű test kihűlése az energiatermelő folyamatok leállása után!

(Veres Gábor)

27. Egy töltés elektrosztatikus térben mozog. A tér sok véletlenszerű elektromos tér szuperpozíciójából alakul ki, melyeket egymástól független források hoznak létre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a töltés által kisugárzott fény legalacsonyabb frekvenciája ω és $\omega + d\omega$ közé esik? Tegyük fel, hogy a töltés csak síkban mozoghat!

(Pollner Péter)

28. Legyenek $\mathbf{E}$ es $\mathbf{B}$ sztatikus, forrásmentes elektromos, illetve mágneses mezők R^3-on, melyek (végtelen) sokszor differenciálhatóak. Tegyük föl továbbá, hogy teljesítik a következő (Bogomolny-)egyenletek valamelyikét:

$$\mathbf{E} = \pm\mathbf{B}.$$

Bizonyítsuk be, hogy amennyiben ezek az egyenletek egy véges energiájú konfigurációt írnak le, akkor $\mathbf{E} = 0$ és $\mathbf{B} = 0$!

Útmutatás: vizsgáljuk a mezők végtelenbeli csavarodását!

(Etesi Gábor)

29. Számoljuk ki a klasszikus ideális gáz állapotösszegét, és ugyanezt N db független síkrotátorra is! Határozzuk meg az entrópiát!

Miért kell a két esetben különböző módon normálnunk, hogy extenzív potenciált kapjunk?

(Pollner Péter)

30. Mint tudjuk, a gáz kitölti a rendelkezésére álló teret. Speciálisan: ha egy edény egyik felét megtöltjük gázzal, a másik fele pedig üres, és eltávolítjuk az elválasztó falat, akkor a gázmolekulák hamarosan egyenletesen töltik be az edény mindkét felét. A statisztikus mechanika ezt hagyományosan úgy magyarázza, hogy azt a makroállapotot, amelyben az edény mindkét részében van gáz, jóval több mikroállapot valósítja meg, mint az aszimmetrikus eloszlást, ezért az előbbi jóval valószínűbb.

A kvantummechanikában azonban a részecskék megkülönböztethetetlenek. Az az állapot tehát, amelyben csak az edény egyik felében van gáz, éppen úgy egyetlen kvantumállapot, mint az a másik, amikor egyenletes az eloszlás az egész edényben, hiszen az egyes részecskék puszta cserebeeréje nem vezet új állapothoz. A statisztikus fizika hagyományos érve tehát elesik. Miért tapasztaljuk mégis, hogy – kvantumelmélet ide, Pauli-elv oda – a gáz mégiscsak betölti a teljes edényt?

(Gnädig Péter)

31. A klasszikus mechanika viriáltétele összefüggést állapít meg egy korlátos mozgást végző rendszer kinetikus és potenciális energiájának időbeli átlagértéke és a teljes energia között. Különösen egyszerű az összefüggés olyan kölcsönhatási potenciál esetén, amely a távolságnak n-edfokú homogén függvénye (Landau I. kötet).

Hasonló képlet érvényes a kvantummechanikában, de nem időbeli átlagra, hanem várható értékre pl. a hidrogénatom esetén (Constantinescu–Magyari: Kvantummechanika feladatok, III/8. feladat).

Vizsgáljuk meg a kételektronos héliumatom esetét, ahol mindhárom részecskepár között $n = -1$ fokú homogén potenciál közvetíti az elektromos kölcsönhatást. Fennáll-e a viriáltétel? Hogyan befolyásolja a viszonyokat a kvantummechanikára jellemző ún. kicserélődési kölcsönhatás?

(Györgyi Géza – Dávid Gyula)

32. Modellezzük a menekülő űr-légy mozgását!

A MIR űrállomáson a legújabb galibát egy légy okozza. Ez komoly gondot okoz az űrhajósoknak, mert zavarja őket munkájukban. Ezért is kérik az ortvayzók segítségét. A légy mozgását a videofelvételek alapján a következő jellemzi: a légy a súlytalanság állapotában semmilyen kitüntetett irányt nem képes érzékelni (se a gravitációs, se a mágneses tér nincs hatással mozgására). A légy – érthetően – pánikhangulatban van, ezért maximális (és mozgása során állandó nagyságú) sebességgel repül. Mozgásának irányát csak a gondolataiban lejátszódó zavaros folyamatok befolyásolják. Ezekről csak annyit tudunk, hogy azok az időben "egyenletesen zavarosak" (a légypszichológia meg gyerekcipőben járó tudomány).

a/ Írjuk le a légy mozgását!

b/ Jellemezzük a légy mozgásának pályáját!

c/ Hogyan tudnánk a mozgás leírása során figyelembe venni a falakat?

d/ Az űrhajósok megelégelik az udvariatlan állatot, és megállapodnak abban, hogy a legyet a zsilipkamrába zárják (ezt egy viszonylag keskeny rés zárja el az űrhajó többi részétől, a rés nyitható-zárható). A $t = 0$ időpontban a legyet a zsilipkamra ajtajának közelében látták. A mozgás kvantitatív jellemzése alapján úgy gondolják, a légy bizonyos időpontokban valószínűbben tartózkodik a zsilip közelében. Meg tudjuk-e állapítani modellünk pillanatnyi állása szerint, melyek ezek az időpontok?

(Alács Péter)

33. Egy négyzet mindegyik sarkában egy-egy spin ül, melyek között csak elsőszomszéd kölcsönhatást feltételezve a rendszer Hamilton függvénye (klasszikus rendszer)

$$H = \eta\, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1,$$

ahol $\eta \in [-1, \infty[$, és mindegyik spin egységnyi hosszúságú, azaz

$$(\mathbf{S}_i)^2 = 1, \quad i = 1, \cdots, 4.$$

Határozzuk meg a rendszer alapállapotát az η paraméter függvényében! Mennyi alapállapotban a rendszer energiája, ill. a mágnesezettsége?

(Cserti József)

34. Vizsgáljuk meg a

$$H(x,p) = x^2 p^2 - \frac{1}{x^2}$$

Hamilton-függvénnyel leírt egydimenziós mechanikai rendszer klasszikus és kvantummechanikai viselkedését, mozgásait, energiasajátállapotait, spektrumát. Fordítsunk nagy gondot a Hamilton-operátor megkonstruálására!

(Bajnok Zoltán)

35. A parciális hullámok módszere a centrális potenciálon történő rugalmas szórás kvantummechanikai problémáját az egyes parciális hullámok (impulzusmomentum-sajátállapotok) aszimpotikus alakjából kiolvasható δ_l fáziseltolódások segítségével írja le. Létezhet-e olyan $V(r)$ centrális potenciál (persze a triviális, azonosan nulla potenciálon kívül), amelyben (rögzített energián) az összes parciális hullám fáziseltolódása nulla, azaz a rendszer szupertranszparens?

(Dávid Gyula)

36. Határozzuk meg a fullerén-molekula (C_{60}) energiaszintjeit szoros kötésű elektron közelítésben! A modellben tegyük fel, hogy az atomtörzsek térben úgy helyezkednek el, mintha egy fullerén-molekula atomjai lennének, és erre a rendszerre ráteszünk *egy* elektront. A Hamilton-operátor a következő:

$$\hat{H}|i\rangle = \epsilon_0 |i\rangle - t \sum_{j=0}^{60} \alpha_{ij} |j\rangle$$

ahol $|i\rangle$ jelöli azt az állapotot, amelyben az elektron az i-ik atomhoz kötődik, továbbá $\alpha_{ij} = 1$ ha i és j szomszédos atomokat jelöl, egyébként 0. A feladatot a molekula szimmetriáinak felhasználásával oldjuk meg! Mit mondhatunk az egyes energiaszintek degeneráltsági fokáról? (A megoldást numerikus módszerekkel ellenőrizhetjük!)

(Farkas Zénó)

37. Tekintsük a következő ún. dekoherencia-modellt, amely a makroszkopikus testek klasszikus tulajdonságait kívánja a kvantummechanikából levezetni:

Egy dimenzióban mozog egy M tömegű pontszerű részecske, mellyel n db m tömegű, ugyancsak egy dimenzióban mozgó részecske ütközik. Legyen $M \gg n\,m$ (pl. gázatomok ütköznek egy nagy tömegű részecskével – Brown-mozgás). A könnyű részecskék egymással nem hatnak kölcsön, a nehéz és a könnyű részecskék kölcsönhatását pedig közelítsük merevgömb-potenciállal. A könnyű részecskék kezdeti hullámfüggvénye legyen

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_j - x_j^0)^2}{4\sigma^2} + i\frac{p_j^0 x_j}{\hbar}\right),$$

ahol x_j^0, p_j^0, σ konstans, x_j a j-edik részecske koordinátája. A nehéz részecske kezdeti hullámfüggvénye $\psi(X)$.

Számítsuk ki a nehéz részecske $\rho(X, X')$ redukált sűrűségmátrixát! (ld. Landau: Elméleti fizika III.) Tételezzük fel, hogy a nehéz részecske megfigyelhető tulajdonságait redukált sűrűségmátrixának sajátállapotai, azaz az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dX' \rho(X, X') \varphi_j(X') = p_j \varphi_j(X)$$

egyenlet $\varphi_j(X)$ megoldásai írják le. Számítsuk ki ezeket a függvényeket és előfordulásuk p_j valószínűségét, ha

a/

$$\psi(X) = \alpha \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(X+a)^2}{4\sigma_0^2}\right) + \beta \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(X-a)^2}{4\sigma_0^2}\right),$$

ahol $\alpha \neq \beta$ és $\sigma_0 << \frac{\sigma}{\sqrt{n}} << a$, azaz $\psi(X)$ két keskeny, egymástól távol levő Gauss-függvény szuperpozíciója,

b/

$$\psi(X) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{X^2}{4\sigma_0^2}\right),$$

ahol $\sigma_0 >> \sigma$, azaz $\psi(X)$ egyetlen széles Gauss-függvény.

Számítsuk ki a φ_j függvényeket impulzusreprezentációban is! Összhangban vannak-e a modellből levonható fizikai következtetések a tapasztalattal?

(Bene Gyula)

38. Alacsony hőmérsékleten a nanométeres átmérőjű, tiszta vezető szálak vezetőképessége kvantált. Egy végtelen hosszú, egyenes vezeték vezetőképességét a következő képlet adja meg:

$$G = N \cdot (2e^2/h),$$

ahol e az elektron töltése, h a Planck-állandó, N pedig az E_F Fermi-energián nyitott csatornák száma. A nyitott csatornák a Schrödinger-egyenletnek a drótban terjedő hullámokat leíró E_F energiájú megoldásai:

$$\psi(x, y, z, E_F) = \Phi_{n,m}(x, y) e^{ik_{n,m}z},$$

ahol z a dróttal párhuzamos, x és y pedig a rá merőleges koordináta. A $k_{n,m}$ hullámszám az n és m kvantumszámoktól függő, valós érték. A $\psi(x, y, z, E_F)$ hullámfüggvény a dróton kívül és a drót felületén eltűnik. Számítsuk ki a kör és a négyzet keresztmetszetű vezeték vezetőképességét a Fermi-energia függvényében! Az elektronok közti kölcsönhatást az effektív tömeggel vesszük figyelembe, ezért az elektronok szabadnak tekinthetők.

(Vattay Gábor – Cserti József)

39. Tekintsünk egy kétdimenziós kvantummechanikai rendszert, melynek potenciálja a következő alakú: $V(x, y) = \alpha y^2$, ahol x és y a két síkbeli koordináta.

Mekkora lesz a rendszer vezetőképessége, ha úgy képzeljük, hogy az elektronokat a potenciálvályú egyik végén (kvázi $x = -\infty$) beengedjük, és azt vizsgáljuk, hogy a másik végére (kvázi $x = \infty$) hány jut el? Ekkor a hullámfüggvényt úgy kereshetjük, mint egy (x irányban) haladó hullám és egy keresztirányú (y irányú) módus szorzatát: $e^{-ik_n x} \cdot u_n(y)$. Azt mondjuk, hogy az elektron az r-ik csatornában van, ha a keresztirányú hullámfüggvénye éppen $u_r(y)$. A megoldáshoz használjuk fel a Landauer-formulát, amely az átjutási valószínűségek (transzmissziós mátrixelemek: t_{nm}) és a vezetőképesség között teremt kapcsolatot. (A $|t_{nm}|^2$ elemek azt mondják meg, hogy az n-ik csatornába engedett elektron milyen valószínűséggel szóródik át az m-ik csatornába.)

A feladat megoldásához használható az alábbi internet-oldalon található angol, illetve magyar nyelvű irodalom is: *http://galahad.elte.hu/~gegix/publ.html*

(Szálka Gergely)

40. Ha a LEP gyorsító alagútjában építenének egy müon-gyorsítót, mekkora hátteret észlelnének a Gran Sasso neutrínó-detektorban?

(Csilling Ákos)

41. Mint tudjuk, az arisztotelészi mechanika mozgásegyenlete a következő alakú (lett volna, ha akkoriban már ismerik a differenciálegyenleteket):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{e}(\mathbf{r}, t),$$

ahol $\mathbf{r}(t)$ a részecske helyvektora, az $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ függvény, az ún. *hipoerő* pedig a környezet hatását írja le. Ilyen hatás hiányában az egyenlet megoldása $\mathbf{r} = const.$, azaz a testek természetes állapota a nyugalom. Galilei óta a Newton-törvény van hatályban:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

ahol $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ a közismert *erő*: azóta az erőmentes testek természetes állapota az egyenes vonalú egyenletes mozgás: $\dot{\mathbf{r}} = const.$

A XXI. század hajnalán újabb forradalom következik. J. B. Curcas és Lee ben Canal, a messewani egyetem kutatói nemrégiben publikalták [X Files, **42** (1997) p. 137.] az ún. Newerton-törvényt:

$$\dddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, t)$$

ahol $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, t)$ az ún. *hipererő*, amely a környezet hatását írja le.

Vizsgáljuk meg az egyenlet következményeit! Vezessük le a közismert megmaradási tételek megfelelőit! Keressünk megoldásokat néhány egyszerű esetben, azaz a jobboldalon szereplő hipererő-függvény speciális választása esetén (javaslatok: szabad mozgás, szabadesés, harmonikus oszcillátor, hidrogénatom...)! Vizsgáljuk meg a gyorsuló koordinátarendszerekben fellépő inerciaerőkre vonatkozó közismert levezetés megfelelőjét az új idők mechanikájában, és értelmezzük a fellépő inercia-hipererőket! Próbáljuk kidolgozni a Lagrange- és a Hamilton-formalizmus új változatát, írjuk fel a Hamilton–Jacobi–Curcas egyenletet és a Poisson–Canal zárójeleket! Tegyük meg az első lépéseket az új mechanika speciális (hiper-)relativisztikus és kvantumelméleti kiterjesztése irányába! Öregebbek felírhatják a hiper-Schrödinger egyenletet is (esetleg meg is oldhatják)...

(Dávid Gyula)

42. Gólyatábor... N fizikus fiú és N bölcsészlány ül a pislákoló tábortűz mellett − nem messze tőlük N darab, szigorúan koedukált kétszemélyes sátor. A sátorbeosztás feladata Kvark Egonra vár.
Ismeretes, hogy mindenki átlagosan m másik nembelivel hajlandó egy sátorban aludni − de hogy ki kivel, azt csak a jó Egon tudja. Hogyan válasszuk meg az $m(N)$ függvényt, hogy Egonnak 50% esélye legyen a mindenkit kielégítő sátorbeosztás elkészítésére? Adjuk meg $m(N)$ aszimptotikus viselkedését, ha $N \to \infty$.
Adott N mellett definiáljuk az "Egon felsül − Egon nem sül fel" átmenet szélességét ($f(N)$). Hogyan változik $f(N)$, ha $N \to \infty$?

(Piróth Attila)

\end{document}